1M

УДК 51 (071)

Л.П. Мироненко, И.В. Петренко, И.А. Новикова
Государственный университет информатики и искусственного интеллекта,
г. Донецк, Украина

Единый подход рассмотрения канонических уравнений кривых второго порядка

Предложена общая теория классификации кривых второго порядка на основе одного общего определения. Получена единая формула для эллипса (окружности), гиперболы и параболы, что значительно упрощает вывод свойств этих линий и связь между ними.

Введение

Раздел аналитической геометрии, связанный с кривыми второго порядка, традиционно излагается исходя из определений эллипса, гиперболы и параболы как геометрического места точек (г.м.т.), удовлетворяющих определенному, характерному данной кривой геометрическому свойству. Например, эллипс определяется как г.м.т., для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная. Гипербола определяется аналогично, но вместо суммы расстояний рассматривается абсолютная разность расстояний. Наконец, парабола определяется как г.м.т., для которых расстояние r от фокуса F до произвольной точки кривой M равно расстоянию d до некоторой прямой D, называемой директрисой [1], [2]. Определения различаются друг от друга, нет единого подхода, более того, не ясно происхождение этих определений.

Принципиально различают два подхода в изложении раздела, связанного с кривыми второго порядка. Условно назовем их аналитическим и геометрическим. В основе первого из них уравнения кривых второго порядка вводятся соответствующими аналитическими выражениями, а геометрические свойства кривых выводятся исходя из аналитических уравнений [3].

В другом подходе в качестве определений принимаются геометрические свойства эллипса, гиперболы и параболы. Как правило, в качестве определений кривых принимаются геометрические свойства фокальных радиусов [4], [5].

Оба подхода имеют существенные недостатки. В аналитическом подходе уравнения кривых «декларируются» и не видно их происхождения. В геометрическом подходе вывод уравнений кривых (за исключением уравнения параболы) сопряжен со сложными и громоздкими вычислениями.

Наконец, существует еще один подход, основанный на использовании свойств симметрии кривых. Этот подход позволяет получить канонические уравнения кривых из общего алгебраического уравнения второй степени [6], [7]. Надлежащим выбором декартовой системы координат и определения кривых второго порядка, основанных на свойствах фокальных радиусов и директрис (на различиях значений эксцентриситетов различных типов кривых), общее уравнение приводится к каноническому уравнению соответствующей кривой.

1 Вывод канонических уравнений линий второго порядка

Рассмотрим общее уравнение второй степени с двумя неизвестными x и y

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y - a_{33} = 0, \tag{1}$$

где ${a_{11}}^2 + {a_{12}}^2 + {a_{22}}^2 \neq 0$, $a_{11}, a_{12}, ..., a_{33}$ – коэффициенты уравнения, заданные действительные числа.

Определим линию второго порядка как г.м.т., для которых отношение расстояния r от заданной фиксированной точки F, называемой фокусом данной кривой, до произвольной точки M кривой к расстоянию d до некоторой прямой D, называемой директрисой, является постоянной величиной e, называемой эксцентриситетом.

Поскольку $r > 0$ и $d > 0$, то для отношения r/d возможны три значения: $0 < e < 1$ (эллипс), $e = 1$ (парабола), $e > 1$ (гипербола).

Расположим ось ординат y декартовой системы координат перпендикулярно директрисе D (на расстоянии p от начала координат), а фокус искомой линии – на оси абсцисс x в точке $(c,0)$. При таком выборе системы координат уравнение искомой кривой не должно измениться при замене $y \to -y$ (кривая должна быть симметричной относительно оси x), что означает равенство нулю коэффициентов a_{12} и a_{23}. В результате имеем уравнение

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x - a_{33} = 0. \tag{2}$$

Заметим, что в этом выражении легко выделить полный квадрат по переменной x. Это означает, что имеется два различных случая – уравнение (2), в котором $a_{11} \neq 0$, $a_{13} = 0$ и $a_{11} = a_{33} = 0$, $a_{13} \neq 0$:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 - a_{33} = 0 \text{ и } a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0. \tag{3}$$

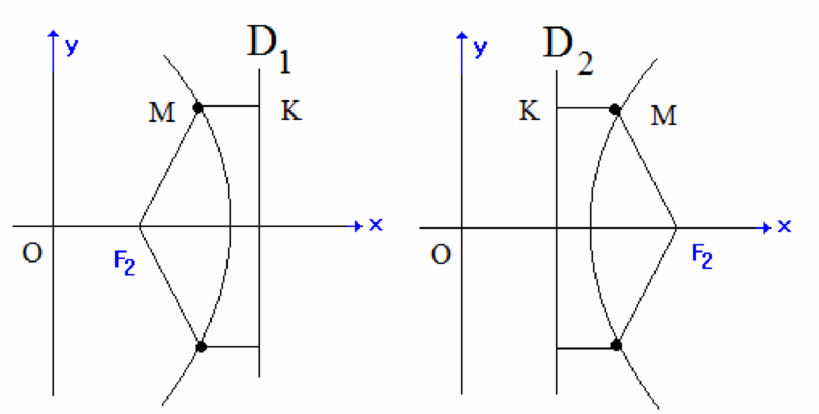


Рисунок 1 – К выводу канонических уравнений эллипса и гиперсолы

Введем формально параметр λ и, не теряя общности изложения, обозначим $a_{11} = 1 - \lambda > 0$. Запишем оба случая, используя δ – символ Кронекера, который определяется равенством $\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$

$$(1-\lambda)x^2 + a_{22}y^2 + \delta_{\lambda,1}2a_{13}x - (1-\lambda)a_{33} = 0. \tag{4}$$

В обоих случаях уравнений (3) коэффициент $a_{22} \neq 0$, поэтому разделим уравнение на $a_{22} > 0$ и переобозначим $\frac{a_{11}}{a_{22}} \to a_{11}, \frac{a_{13}}{a_{22}} \to a_{13}, \frac{a_{33}}{a_{22}} \to a_{33}$, получим

$$(1-\lambda)x^2 + y^2 + \delta_{\lambda,1} 2a_{13}x - (1-\lambda)a_{33} = 0. \quad (5)$$

Рассмотрим случай $\lambda \neq 1$, в котором возможны два варианта: $a_{11} > 0, a_{33} > 0, \lambda < 1$ и $a_{11} > 0,\ a_{33} > 0,\ \lambda > 1$. В случае $\lambda < 1$

$$\frac{x^2}{a_{33}} + \frac{y^2}{(1-\lambda)a_{33}} = 1.$$

Введем обозначения $a^2 = a_{33}$, $b^2 = (1-\lambda)a_{33} = (1-\lambda)a^2$, при этом, уравнение принимает вид канонического уравнения эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (6)$$

Выясним смысл параметра λ, поскольку смысл параметров a и $b = \sqrt{1-\lambda}a < a$ очевиден и следует прямо из уравнения (6) – это большая и малая полуоси эллипса.

$$b^2 = (1-\lambda)a^2 \to \lambda = 1 - \frac{b^2}{a^2} = e^2 \to e_{элл.} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} < 1.$$

Назовем полученное выражение для $e_{элл.}$ эксцентриситета эллипса.

В случае $\lambda > 1$, что эквивалентно $e > 1$, получим уравнение гиперболы и найдем выражение для эксцентриситета гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{(e^2-1)a^2} = 1, \text{ где } b^2 = (e^2-1)a^2 \to e_{гип.} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} > 1.$$

Запишем каноническое уравнение гиперболы в привычном виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (7)$$

Замечание. В определениях эллипса и гиперболы фигурируют только один фокус и одна директриса. Симметрия уравнений (6) и (7) относительно оси ординат означает, что у кривых по два фокуса $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ и по две директрисы $D_1 : x = -d$ и $D_2 : x = d$.

Остается рассмотреть случай $\lambda = 1$ или $e = 1$. Полагая в уравнении (3) $p = -\frac{a_{13}}{a_{22}} > 0$, получим каноническое уравнение параболы

$$y^2 = 2px, \quad (8)$$

где смысл параметра p: $p/2$ – расстояние от фокуса до начала координат, то есть $F(p/2,0)$.

Теперь можно записать все линии второго порядка в канонических формах одним выражением в зависимости от значений эксцентриситета e

$$(1-e^2)(x^2 - a^2) + y^2 = \delta_{e,1} 2px. \quad (9)$$

Заметим, что кроме полученных ранее уравнений эллипса (6) при $e < 1$, гиперболы (7) при $e > 1$, параболы (8) при $e = 1$, имеем также уравнение окружности $x^2 + y^2 = -a^2$ при $e = 0$.

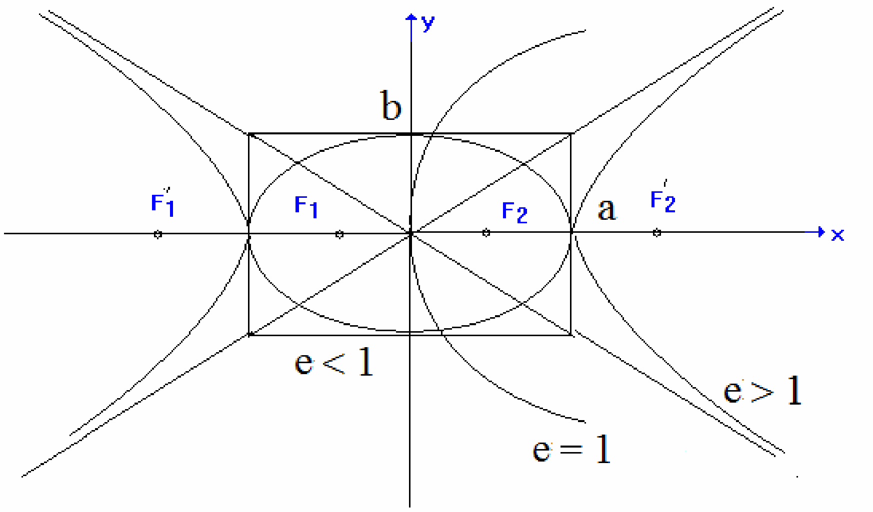
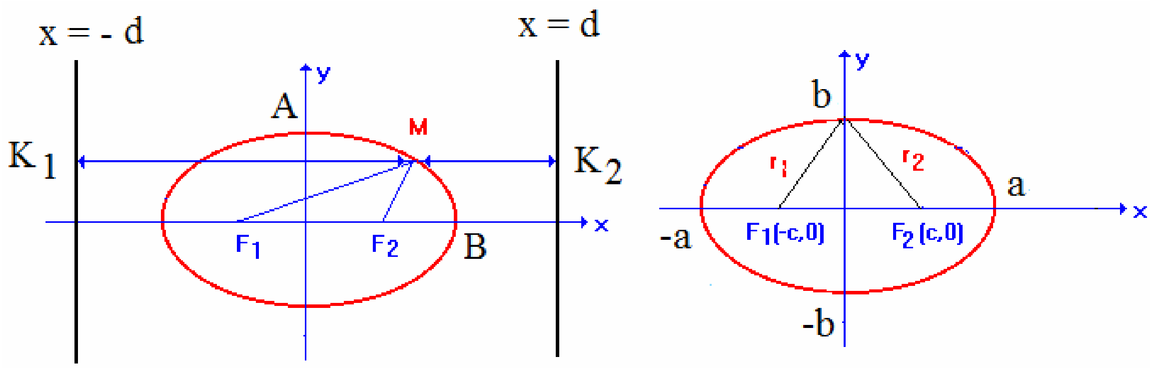


Рисунок 2 – Классификация линий второго порядка по значениям эксцентриситета e, $F_1(-\sqrt{a^2-b^2},0), F_2(\sqrt{a^2-b^2}^{\,2},0), F_1'(-\sqrt{a^2+b^2},0), F_2'(\sqrt{a^2+b^2},0)$

2 Основные геометрические свойства линий второго порядка

Рассмотрим некоторые важные геометрические свойства линий второго порядка, следуя логике предыдущего пункта.

Прежде всего, установим свойства фокальных радиусов кривых и связь между параметрами a,b,c для эллипса и гиперболы. Для этого рассмотрим положения фокальных радиусов, как показано на рис. 3 а).



а) б)

Рисунок 3 – К выводу геометрических свойств эллипса

Согласно определению эллипса

$$\frac{r_1(x,y)}{|MK_1|} = \frac{r_2(x,y)}{|MK_2|} = e,\ r_1 + r_2 = (|MK_1| + |MK_2|)e = const.$$

С другой стороны, в точке B $r_1(a,0) + r_2(a,0) = c + a + (a - c) = 2a$. Откуда следует важное свойство фокальных радиусов эллипса

$$r_1 + r_2 = 2a, \tag{10}$$

которое часто берется в качестве определения эллипса.

Определение. *Эллипсом* называется г.м.т., для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2, называемых *фокусами*, есть величина постоянная.

Сравнивая полученные выражения, имеем $(|MK_1|+|MK_2|)e = 2a$. В точке $M = A$ имеем $AK_1 = AK_2 = \frac{a}{e}$, откуда получим уравнения директрис D_1 и D_2:

$$x = \mp\frac{a}{e}. \qquad (11)$$

Из рис. 3 б) в точке A $r_1^2(0,b) = r_2^2(0,b) = c^2 + b^2 = a^2$. Откуда следует важное свойство эллипса

$$c^2 = a^2 - b^2. \qquad (12)$$

Подставим это выражение в выражение для эксцентриситета эллипса, получим

$$e = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} = \frac{c}{a}.$$

Это есть общее выражение для эксцентриситета как для эллипса, так и, как мы увидим ниже, для гиперболы

$$e = \frac{c}{a}. \qquad (13)$$

Как правило, выражение (13) используется в качестве определения эксцентриситета линии второго порядка.

Найдем выражения для фокальных радиусов стандартным путем, записав фокальные радиусы через координаты. Для фокуса F_1 эллипса имеем:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \sqrt{(x+c)^2+b^2\left(1-x^2/a^2\right)} =$$

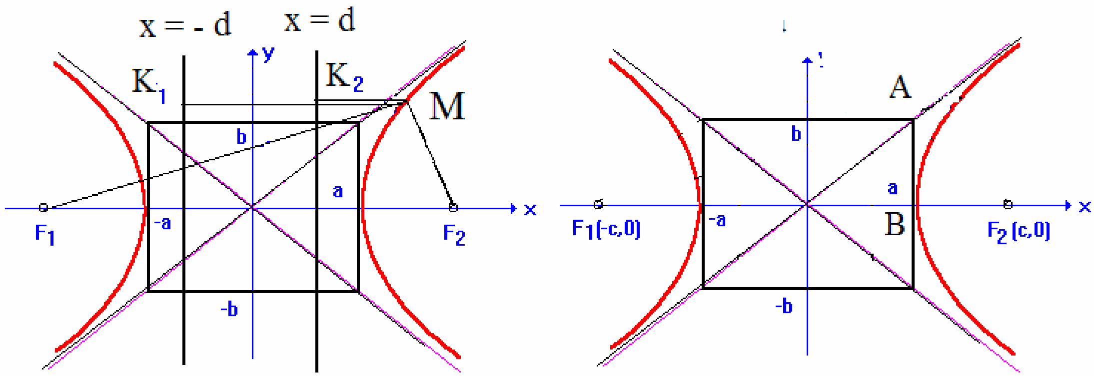
$$= \sqrt{(x+c)^2+(a^2-c^2)\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)} = \sqrt{a^2+2xc+\frac{c^2}{a^2}x^2} = a+\frac{c}{a}x = a+ex.$$

Аналогично для фокуса F_2: $r_2 = a - ex$.

Итак, выражения для расстояний от фокусов эллипса до произвольной точки M эллипса

$$r_1 = a + ex, \qquad r_2 = a - ex. \qquad (14)$$

Аналогичные геометрические свойства рассматриваются для гиперболы.



а) б)

Рисунок 4 – К выводу геометрических свойств гиперболы

Согласно определению гиперболы

$$\frac{r_1(x,y)}{|MK_1|}=\frac{r_2(x,y)}{|MK_2|}=e,\ r_1-r_2=(|MK_1|-|MK_2|)e=const.$$

С другой стороны, в точке B $r_1(a,0)-r_2(a,0)=c+2a-c=2a$. Откуда следует важное свойство гиперболы $r_1-r_2=2a$. Для левой ветви гиперболы имеем $r_1-r_2=-2a$. В результате

$$|r_1-r_2|=2a. \quad (15)$$

Это свойство часто берется в качестве определения гиперболы.

Определение. *Гиперболой* называется г.м.т., для которых абсолютная разность расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2, называемых *фокусами*, есть величина постоянная.

Уравнения директрис гиперболы совпадают с уравнениями для эллипса (11). Поскольку для эллипса $e<1$, то директрисы находятся за пределами области, ограниченной кривой, а для гиперболы $e>1$, следовательно, между ветвями гиперболы.

Из рис. 4 б) следует важное свойство гиперболы

$$c^2=a^2+b^2. \quad (16)$$

Подставив это выражение в формулу для эксцентриситета гиперболы, придем к определению эксцентриситета (13)

$$e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\frac{c}{a}.$$

Для гиперболы выражения для фокальных радиусов r_1 и r_2 как для эллипса (14), но $e>1$.

Остается рассмотреть параболу. В отличие от эллипса и гиперболы, для описания которых используется два параметра a и e или пара чисел a и b, в описании параболы используется только один параметр p (в этом случае $e=1$).

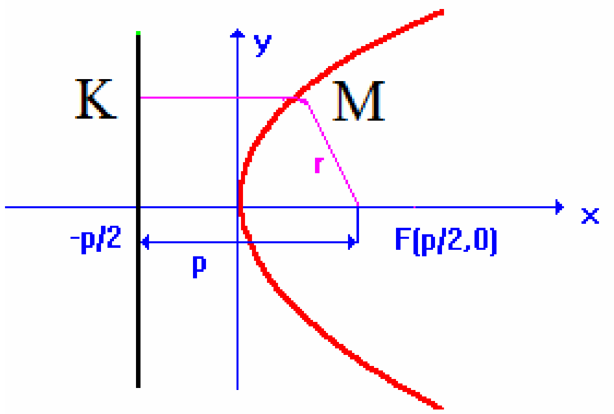


Рисунок 5 – К выводу геометрических свойств параболы

Напомним определение параболы

Определение. *Параболой* называется г.м.т., для которых расстояние до фокуса F равно расстоянию до некоторой прямой, называемой директрисой.

Согласно определению параболы имеем $\frac{r(x,y)}{|MK|}=e=1\rightarrow r(x,y)=MK$, или в ко

ординатах

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}.$$

Возведем обе части уравнения в квадрат, приведем подобные члены, получим каноническое уравнение параболы $y^2 = 2px$, из которого следует смысл p , называется *параметром* параболы и равен расстоянию от фокуса до директрисы.

Заключение

В предлагаемой теории вывод канонических уравнений и классификация линий второго порядка производится на основе единого определения для всех линий второго порядка. Подход позволяет записать все типы кривых, эллипс (окружность), гиперболу, параболу в виде одной формулы (9). Вывод канонических уравнений произведен из одного общего определения для всех типов кривых второго порядка. Основой вывода и классификации кривых используется различие эксцентриситетов для кривых различных типов.

Общий подход позволяет сформулировать ряд геометрических свойств кривых второго порядка, а именно свойства фокальных радиусов, выражения фокальных радиусов через эксцентриситет, уравнения директрис, связь параметров для каждой из кривых, обосновать наличие двух фокусов у эллипса и гиперболы.

Литература

1. Кадомцев С.Б. Аналитическая геометрия и линейная алгебра / Кадомцев С.Б. – ФМЛ, 2003. – 157 с.
2. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии / Ефимов Н.В. – М. : Наука. – 272 с.
3. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Александров П.С. – М. : Наука, 1979. – 512 с.
4. Дьедонне Ж. Линейная алгебра и элементарная геометрия / Дьедонне Ж. – М. : Наука, 1972. – 336 с.
5. Ефимов Н.В. Линейная алгебра и многомерная геометрия / Н.В. Ефимов, Э.Р. Розендорн. – М. : Наука, 1969. – 527 с.
6. Улитин Г.М. Геометрический подход к выводу канонических уравнений линий второго порядка / Улитин Г.М., Мироненко Л.П. // сб. Науково-методичних робіт. – Донецьк : ДонНТУ, 2009. – Вип. 6. – С. 3-9.
7. Улитин Г.М. Использование свойств симметрии кривых второго порядка для вывода их канонических уравнений / Г.М. Улитин, Л.П. Мироненко // Дидактика математики. – Донецк : ДонНУ, 2009. – С. 32-40.
8. Ильин В.А. Линейная алгебра / В.А. Ильин, Э.Г. Поздняк. – М. : Наука, 1999. – 296 с.
9. Кадомцев С.В. Линейная алгебра и аналитическая геометрия / Кадомцев С.В. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 160 с.
10. Apostol T.M. Calculus. One-Variable Calculus with an Introduction to Linear Algebra / Apostol T.M. – John Wilay and Sons, Inc., 1966. – Vol. 1. – 667 s.
11. Делоне В.И. Аналитическая геометрия / В.И. Делоне, Д.А. Райков. – Гостехиздат, 1949. – Т. 1. – 592 с.
12. Привалов И.И. Аналитическая геометрия / Привалов И.И. – Москва : Изд. ФМЛ, 1956. – 272 с.

Міроненко Л.П., Петренко І.В., Новікова І.А.

Єдиний підхід розглядання канонічних рівнянь другого порядку

Запропанована загальна теорія класифікації кривих другого порядку на основі єдиного загального визначення. Отримана єдина формула для еліпса (окружності), гіперболи та параболи, що значно спрощує висновок властивостей цих ліній та зв’язок між ними.

Статья поступила в редакцию 15.02.2010.